第1章　解析学

1.1　偏微分と全微分

高校までの数学は関数といえば独立変数 (勝手に変化できる変数) が 1 変数の陽関数しか扱っていない。しかし、世の中の事象を考えると、ある変量が 1 つの独立変数にしか依存しないことは少ない。地形を表現するには、標高は緯度と経度の 2 つの独立なパラメータを持つ。空間内の物理量 (例えば温度や圧力など) を見ても、そのパラメータは時間 t と空間での位置 (x, y, z) を持っている。そこで、物理ではどうしても多変数関数の微分や積分をきちんと理解する必要が出てくる。

1.1.1　偏微分 (Partial differentiation)

多変数の関数に対して、その変数を一旦固定して定数と見なし、一つの成分のみを変数として動かして、その成分方向への瞬間の増分を与える微分法である。
変量が複数個存在する場合、特にその中の 1 変数に着目して従属変数の変化を捉える手法は一般的である。皆さんご存じのボイルの法則やシャルルの法則はその典型である。

2 変数の場合

簡単のため、2 変数の場合のみを詳しく述べる。$z = f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2$ のある領域 D 上で連続であると定義された実数値関数で、x と y とは関数関係を持たずに独立に変化することができるとする。そして y を任意の値 b で固定すると、これを $z = f(x, b) := f_1(x)$ という変数 x の関数だと思うことができる。このとき、この $z = f_1(x)$ の $x = a$ における微分係数

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dx}(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(a + \Delta x) - f_1(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}\end{aligned}$$

を $z = f(x, y)$ の、点 (a, b) における x に関する偏微分係数とよぶ。この極限を

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)} = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = z_x|_{x=a, y=b}$$

などのように記す。$z = f(x, y)$ を曲面と考えると、偏微分係数 $f_x(a, b)$ は領域上の点 (a, b) における、z の x 方向の傾きを表している。領域 D $\subset \mathbf{R}^2$ の各点 (x, y) で x に関する偏微分係数が存在するとき、これを x, y の関数と見た

$$\partial_x f(x, y) = f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

領域 D の各点で偏導関数が定義できるとき、z は領域 D において x に関して偏微分可能であるという。
同様に、x を任意の値 a で固定してできる $z = f(a, y) = f_2(y)$ という y についての関数が、ある領域 D に属する y について微分可能なら

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

を z の y についての偏微分といい、z は D において y について偏微分可能であるという。
一般の場合
$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ の変数 $x_i (1 \leq i \leq n)$ に関する偏微分または偏導関数とは、$\mathbf{R}^n$ のある領域 D の各点において極限

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

が存在するとき、その極限として得られる D 上の関数のことをいい

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \partial_x f = u_x$$

などであらわす。他に使われている変数を明示するときは

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}, \quad \partial_x f(x, y, z), \quad u_{x_i}|_{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

などの記法が使われる.

1.1.2 高階偏導関数, 偏微分の順序

$f(x, y)$ が偏微分可能で偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ が再び偏微分可能であれば、それぞれの偏導関数を考えることができる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

の 4 つのあらたな関数が得られる。これらを f の **2 階偏導関数**という。
定理
関数 $f(x, y)$ に対して、$f_{xy} f_{yx}$ がともに存在して連続であれば (この条件のことを $\mathbf{C^2}$**級** という)、$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(y, x)$ が成り立つ。(クレローの定理)
証明

$$\Delta = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

とおく。 また、y を定数と考えて $u(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ とすると、$\Delta = y(x + \Delta x) - y(x)$ と表せる。これに平均値の定理を適用すると

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta x u'(x + \theta_1 \Delta x) \\ &= \Delta x \{ f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f_x(x + \theta_1 \Delta x, y) \} \end{aligned}$$

となる $0 < \theta_1 < 1$ が存在する。さらに $\{\}$ の中を y についての関数とみなして平均値の定理を適用すると

$$\Delta = \Delta x \Delta y(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y)$$

となる $0 < \theta_2 < 1$ が存在する。これと f_{xy} が連続であることから

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{\Delta}{\Delta x \Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} f_{xy}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) = f_{xy}(x, y)$$

が得られる。一方、x を定数と考えて $v(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ とすると、$\Delta = v(y + \Delta y) - v(y)$ と表せる。これに対して先ほどと同様にすると

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{\Delta}{\Delta x \Delta y} = f_{yx}(x, y)$$

が得られる。したがって $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ である。

1.1.3 全微分 (Total differentation)

では、多変数の関数のすべて変数に対する微分を考えるとどうなるであろうか。

2 変数の場合

変数 x, y がそれぞれ勝手に微小量 $\Delta x, \Delta y$ だけ変化すると、それに合わせて関数 f の値も変化するだろう。 その変化量 Δf は次のように表せる。

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

この式は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (1.1) \\
&= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

ここで極限を考える。

$$\begin{aligned}
df &:= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \Delta f \\
&= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy
\end{aligned}$$

ここで $dx := \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$ で dy も同様に定義される。

3 変数の場合

念のため 3 変数の場合についても確認してみよう。
物理現象を扱う場合に一般的な、$f(x, y, t)$ について考える。変数 x, y, t がすべて独立変数であるとする。

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t)$$

この式は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y + \Delta y, t + \Delta t) && (1.3)\\
&\quad + f(x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t + \Delta t) + f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t) && (1.4)\\
&= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y + \Delta y, t + \Delta t)}{\Delta x}\Delta x && (1.5)\\
&\quad + \frac{f(x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t + \Delta t)}{\Delta y}\Delta y && (1.6)\\
&\quad + \frac{f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t)}{\Delta t}\Delta t && (1.7)
\end{aligned}$$

ここで極限を考える。

$$\begin{aligned}
df &:= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0} \Delta f \\
&= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y + \Delta y, t + \Delta t)}{\Delta x}\Delta x \\
&\quad + \lim_{\Delta y, \Delta t \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t + \Delta t)}{\Delta y}\Delta y \\
&\quad + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t)}{\Delta t}\Delta t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t)}{\Delta x}\Delta x + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t)}{\Delta y}\Delta y \\
&\quad + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t)}{\Delta t}\Delta t \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt
\end{aligned}$$

一般の場合

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

多変数関数 f に対するこの表式を**全微分**または、**完全微分**と呼ぶ。
数学的には、全微分可能性について厳密に議論する必要がある。

1.2　ラグランジュの未定乗数法

　領域 D 内で連続かつ微分可能な多変数関数 $f(x,y)$ が極値を取る条件を求めたいとする。
極値においては関数 f の全微分が $df=0$ になることが必要である。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

この式がどんな微小変化 dx, dy 対しても成り立つために

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

となることが取敢えずの極値の条件である。　残念ながらこの条件から導かれる点 (x_0, y_0) が極小か極大か、ただの停留点か、あるいは鞍点であるかということは分からない。

　鞍点というのは、例えば 2 変数関数をグラフにしたときの図形が馬の鞍のようになる場合の話で、ある方向には極小であるがある方向には極大である、という状況になる点である。　山の尾根沿いの道に例えてもいいかも知れない。　道の左右はどちらを向いても下り坂だが、前後は両方とも上り坂ということがある。　そういう点だ。
その他にも、現在点は水平だが、前には上り坂、後ろには下り坂という状況だってある。　上に書いた条件だけではそこまでの判定はできないが、とりあえず、極値になりそうな候補をすべて導き出すことならば出来る。

条件付極値判定

ではこれに対して、二つほどの束縛条件が加わったらどうなるだろう。

$$g(x,y) = 0$$

これでは dx, dy はそれぞれ独立に、自由には動かせなくなってしまう。dx だけ変化させて df が変化するかどうかを見たくても、同時に dy が動いてしまうのだ。　そんな状況で df が 0 になるところを探さなくてはならない。
ラグランジュのアイデアは、この拘束条件を未定係数倍して $df=0$ に組み込んでしまうというものだ。

$$df + \alpha dg = 0$$

という式を作る。詳しく書くと、

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\Big) + \alpha\Big(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\Big) = 0$$

変形すると、

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \alpha\frac{\partial g}{\partial x}\Big)dx + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}dx + \alpha\frac{\partial g}{\partial y}\Big)dy = 0$$

この式がどんな微小変化 dx, dy 対しても成り立つために

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \alpha\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

この形式を知っていれば、幾つもの条件式を作って書き並べなくていいので、非常にシンプルに話を進めることができるという利点がある。　逆に知らないと、このやり方を見たときに、一体何の

計算をやっているのだろうと困惑することになる。実はこの方法で、高校生の学習する条件付き最大最小の問題はことごとく解ける。
県版問題集の数学 III+C 問題 405 などを解いてみよう。

練習 1. 点 (x,y) が楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上を動くとき、$2x^2+xy$ の最大値最小値を求めよ。

1.3 連鎖律 (Chain rule)

多変数関数の変数が独立変数でない場合は、本当は多変数関数ではないので、先ほどの全微分にあたるケースは合成関数の常微分法について考えることになる。
具体的には

$$f(x(t),y(t))$$

のように変数 x,y が t の関数であるような場合である。ご存じのように、重力場での物体の放物運動の記述などはこのケースに該当する。$f(x,y)$ が領域 D 上で x,y について偏微分可能で、$x=x(t)$,$y=y(t)$ が t について常微分可能であるとする。このとき合成関数 $f(x(t),y(t))$ は t について常微分可能で

$$\Delta f = f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t))$$

$$= f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t+\Delta t)) + f(x(t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t))$$
$$= \frac{f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t+\Delta t))}{x(t+\Delta t)-x(t)}\cdot\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\Delta t$$
$$+\frac{f(x(t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t))}{y(t+\Delta t)-y(t)}\cdot\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\Delta t$$

両辺を Δt で割って

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t+\Delta t))}{x(t+\Delta t)-x(t)}\cdot\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$
$$+\frac{f(x(t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t))}{y(t+\Delta t)-y(t)}\cdot\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$$

ここで極限を考える。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t+\Delta t))}{x(t+\Delta t)-x(t)}\cdot\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$
$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x(t),y(t+\Delta t)) - f(x(t),y(t))}{y(t+\Delta t)-y(t)}\cdot\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$$

$\Delta t\to 0$ のとき $x(t+\Delta t)-x(t)\to 0$ かつ $y(t+\Delta t)-y(t)\to 0$ なので、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

また、座標変換などのケースにおいては、さらに次のようなケースが起こる。

$$f(x(s,t),y(s,t))$$

$f(x,y)$ が領域 D 上で x,y について偏微分可能で、$x=x(s,t)$,$y=y(s,t)$ が s,t について偏微分可能であるとする。このとき合成関数 $f(x(s,t),y(s,t))$ は s,t について偏微分可能で、例えば t についての偏微分は先ほどの t についての常微分をイメージすればよい。

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

この関係を一般的に**連鎖律**という。
さらにこれを行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}$$

この $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}$ の部分を**ヤコビ行列**と呼び、$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ などと表す。

さらに，2 変数関数 $s=s(u,v)$，$v=v(u,v)$ であるとき，x,y は u，v の関数になる．
すると連鎖律より，たとえば

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

が成り立つ．そのほか $\dfrac{\partial x}{\partial v}$，$\dfrac{\partial y}{\partial u}$，$\dfrac{\partial y}{\partial v}$ を計算することによりヤコビ行列について

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v}\\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v}\end{pmatrix}$$

すなわち，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}$$

が成り立つことがわかる．
特に，s，t の関数 x，y が逆に $s=s(x,y)$，$t=t(x,y)$ である場合には

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y}\\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

すなわち，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

が成り立つ．これは 1 変数関数 $y=f(x)$ が逆関数を持つときに成り立つ

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$$

と言う関係の拡張であると考えることができる．
具体的にこれを用いて座標変換を議論してみよう。
$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ と極座標表示してみると、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

となる．したがって $r\neq 0$ のとき

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{r\cos\theta}{r}\end{pmatrix}$$

が成り立つ．
従って，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\quad\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\quad\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}$$

すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

練習 2. $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を**ラプラス作用素**または**ラプラシアン**といい，関数 $f(x,y)$ に対して

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

である．
極座標表示した場合

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

となることを示せ．